

EURÓPA BOLYGÓ

ELEMEI

ANNAK TIZ ELSŐ ÉSZLELT SZEMBENÁLLÁSA

SZERINT.

DR. MURMANN ÁGOST

A PRÁGAI CSILLAGDA SEGÉDJÉTŐL.

~~~~~

(Bemutattatott a III. osztály ülésén 1871. jun. 19.)

~~~~~

PEST.

EGGENBERGER FERDINÁND M. AKAD. KÖNYVÁRUSNÁL.

(HOFFMANN ÉS MOLNÁR.)

1871.

EURÓPA BOLYGÓ ELEMEI

ANNAKTIZ ELSŐ ÉSZLELT SZEMBENÁLLÁSA SZERINT.

Dr. MURMANN ÁGOST

A PRÁGAI CSILLAGDA SEGÉDJÉTŐL.

(Bemutattatott a III. osztály ülésén 1871. jun. 19.)

A számítások, melyek egy bolygó felett ennek egymásutáni szembenállásai érdekében elintézendők, főleg a következő három teendőre oszlnak, t. i. a normálhelyek képezése, a háborok számítása, és a pályaelemek javítására. Ezen három műtétel azonban egyenlőn nem ismétlődik mindenkor: azon leszünk ugyanis, hogy minden szembenállás normálhelyt szerezzen nekünk, mialatt új elemjavításra csak több szembenállás multával lesz alkalmunk, — a háborokat illetőleg pedig a számítás néha kezdetétől fogva ismétlődő. Ezen körülmény azt hozza magával, hogy áttekinthetőség kedvéért egy, több éven át terjedő pályaszámítás előadásában a számítások és eredmények inkább a megnevezett három műtét, mint az idő folyta szerint, melyben egymásután az egyes számítások létre jöttek, rendeztethetnek el. Előterjesztendők Európa bolygó ez időkig észlelt szembenállásainak kidolgozását, e módszerrel mi is akarunk élni s csak még azt jegyezzük meg, hogy az ennek következtében szükségelt gyakoribb idézmények majd olyan helyekre vonatkoznak, melyek a szövegben előbb, majd olyanokra, melyek utóbb fordulnak elő.

A normálhelyek képezése.

Szoros pályaelemek kiszámítására csak akkor lehet reményünk, mikor képesek vagyunk oly észleleteket alapul vetni a számításnak, melyek huzamosb időközönként törtér-

tek s a pályának igen különböző részeire vonatkoznak. Ezen viszony nagyobb mértékben áll oly észleleteknél, melyek különböző szembenállások alatt történtek, mint olyanoknál, melyek a bolygó ugyanazon egy láthatási időszakából valók. Ez okból (míg az észleleteknek végleges kutatásától s netalán különös körülményektől eltekinteni szabad) rendesen nincs nagy nyereségünk, ha számosabb lefolyt szembenállások mindegyikéből egy-kettőnél több normálhelyt képezzünk, mert csaknem bizonyos, hogy a normálhelyek ezen (a számítást nem kevésbé terhelő) sokasítása által az eredő pályaelemek csak igen kis mérvben fognak változni.

Kiválasztjuk tehát az 1858—1861. évek számára nagyobb számban képezett, s a bécsi cs. tudományos akadémia értesítőjében közölt normálhelyek közül a következő négyet:

sz.	berlini köz. idő	látsz. egyenes em.	látsz. elhajlás	Szempl. szá- ma
I. 1858. február 15.00	160° 0' 35."11	+13° 13'	18."55	15
II. 1859. május 20.48	235 25 32.27	—9 10	22.52	4
III. 1860. július 22.95	303 12 27.29	—18 17	5.49	11
IV. 1861. október 7.81	14 52 55.13	—4 14	31.71	12

— 1862-és 1868-ban nem volt szembenállás.

A többi (1863—1867, 1869) év szembenállásaiban egy-egy normálhelyt a következőkben származtatunk le. Itt pedig a legegyszerűbb eljárási módot fogjuk követni; elfogadjuk ugyanis, hogy az észleletek a naplótól való eltéréseinek közép száma az észlelési idők középszámának megfelel, mert az összehasonlításra használt naplók már oly szoros elemekkel vannak számítva, hogy a naplójavítások különbségei (eltekintve az esetleges észlelési hibákat) és az időkülönbségek közötti állítólagos arányosság valószínű. Az összehasonlításra szolgáló naplók 1863, 1864 és 1869-ki szembenállások számára a berlini évkönyvben, az 1867-diki számára az „Astronomische Nachrichten“-ben tartalmazzák, az 1865. és 1866-diki években történt észleletek összehasonlítására pedig a következő (közé még nem tett) naplókat számítottuk ki:

l á t s z ó l a g o s				földtéli táv.
berlini köz. idő	egy. emelkedés		elhajlás	log.
Ia) elemekkel s a háborok elsőbbi értékeivel				
1865. jul. 13 ^d 0 ^h	17 ^h 52 ^m	36 ^s 30	— 17° 30' 55." 5	0.390917
14	51	56.56	32 56.1	
15	51	17.66	34 58.0	
16	50	39.59	37 1.0	
17	50	2.39	39 5.0	0.395273
18	49	26.10	41 10.0	
19	48	50.77	43 16.3	
20	48	16.42	45 23.7	
21	47	43.04	47 32.2	0.400268
22	47	10.69	49 41.9	
23	46	39.40	51 52.5	
24	46	9.21	54 4.1	
25	45	40.09	56 16.7	0.405845
26	45	12.09	— 17 58 30.2	
27	44	45.22	— 18 0 44.6	
28	44	19.51	2 59.9	
29	43	54.96	5 16.0	0.411938
30	43	31.58	7 32.9	
31	43	9.40	9 50.6	
august. 1	42	48.41	12 9.0	
2	42	28.64	14 28.1	0.418482
3	42	10.09	16 47.9	
4	41	52.75	19 8.4	
5	41	36.65	21 29.5	
6	41	21.78	23 51.1	0.425409
7	41	8.16	26 13.4	
8	40	55.78	28 36.1	
9	40	44.65	30 59.3	
10	40	34.77	33 23.0	0.432661
11	40	26.14	35 47.1	
12	40	18.77	38 11.5	
13	40	12.64	40 36.3	
14	17 ^h 40	7.78	— 17 43 1.5	0.440180

Ib) elemek szerint

1866. sept.	3 ^d 0 ^b	22 ^h 38 ^m	57.578	— 13°57' 14.2"	0.356336
	4	38	14.51	— 14 3 0.7	
	5	37	31.33	8 43.5	
	6	36	48.29	14 22.1	
	7	36	5.44	19 56.5	0.357243
	8	35	22.83	25 26.2	
	9	34	40.50	30 51.0	
	10	33	58.49	36 10.6	
	11	33	16.86	41 24.7	0.359022
	12	32	35.65	46 33.2	
	13	31	54.90	51 35.8	
	14	31	14.63	— 14 56 32.2	
	15	30	34.91	— 15 1 22.4	0.361642
	16	29	55.77	6 6.0	
	17	29	17.25	10 42.9	
	18	28	39.40	15 12.9	
	19	28	2.24	19 35.8	0.365060
	20	27	25.82	23 51.6	
	21	26	50.15	28 0.0	
	22	26	15.27	32 0.9	
	23	25	41.22	35 54.3	0.369220
	24	25	8.03	39 39.9	
	25	24	35.71	43 17.7	
	26	24	4.30	46 47.6	
	27	23	33.82	50 9.5	0.374064
	28	23	4.30	53 23.3	
	29	22	35.78	56 28.9	
	30	22	8.26	— 15 59 26.3	
október	1	21	41.79	— 16 2 15.4	0.379530
	2	21	16.37	4 56.1	
	3	20	52.02	7 28.4	
	4	20	28.78	9 52.2	
	5	22 ^h 20	6.66	— 16 12 7.6	0.385550

Következnek most az összehasonlítások eredményei az egyenesemelkedés (α) és elhajlás (δ)-ban (Observ.— Calcul).

Az észleletek az „Astronomische Nachrichten“-ben (a párisiak az ottani évkönyvekben) tartalmazvák; az 1866-diki észleletek még akkor Dr. Tietjen és Karlinski igazgató észlelők kegyessége által magánuton közöltettek a szerzővel.

idő	észlelési hely	α (o—c)	δ (o—c)
1863-diki szembenállás			
január 28.36	Páris	—3 ^s .79	—0. ^{''} 9
28.38	"	—3.86	—3.8
31.42	"	—3.74	—2.4
február 3.40	Bécs	—3.27	—4.5
7.40	"	—3.60	—1.5
9.38	Páris	—3.63	—2.9
9.40	"	—3.84	—3.3
10.38	Bécs	—3.75	—1.5
10.46	Páris	—3.79	—2.6
10.47	"	—3.68	—3.3
12.37	"	—3.63	—3.2
12.39	"	—3.41	—2.5
13.38	"	—3.46	—2.3
13.40	Leiden	—3.44	—0.8
14.36	Páris	—3.37	—2.0
16.39	"	—3.76	—3.3
17.38	"	—3.55	—3.4
18.36	Bécs	—3.57	—2.9
18.38	Páris	—3.51	—6.3
20.35	Bécs	—3.31	—4.6
21.39	Páris	—3.33	—1.8
24.47	"	—3.38	—3.4
25.34	Bécs	—3.65	—2.8
február 12.35	középsz.	—3. ^s 550	—2. ^{''} 87

1864-diki szembenállás

április 6.45	Bécs	—6. ^s 23	+26. ^{''} 7
7.44	"	—6.52	+42.2
7.46	"	—6.26	+31.7
11.53	Greenwich	—6.17	+31.4
12.53	"	—6.23	+35.6
13.53	"	—6.48	+32.8

április	15.40	Bécs (Josefst.)	—6. ^s 37	+33. ^{''} 9
	16.38	" "	—6.03	+36.4
	16.41	" "	—6.29	+34.5
	16.42	Bécs	—6.42	+29.8
	19.36	Bécs (Josefst.)	—6.02	+39.6
	19.39	Bécs	—6.18	+35.0
	19.50	Greenwich	—6.29	+32.8
	20.42	"	—6.23	+31.2
	21.50	"	—6.31	+33.3
	22.49	Páris	—6.45	+33.0
	23.49	"	—6.43	+33.0
	25.34	Bécs (Josefst.)	—6.09	+35.4
	26.46	Páris	—6.17	+31.5
április	16.92	középsz.	—6. ^s 372	+33. ^{''} 67

1865-diki szembenállás.

julius	14.42	Bécs	—3. ^s 82	+9. ^{''} 2
	14.46	"	—3.09	+7.5
	15.41	"	—3.49	+10.9
	16.45	"	—3.34	+6.4
	17.40	"	—3.56	+7.5
	17.42	"	—3.78	+2.9
	19.42	"	—3.60	+6.4
	20.42	"	—3.63	+7.3
	28.38	"	—3.20	+6.6
	28.40	"	—3.31	+2.0
julius	19.22	középsz.	—3. ^s 482	+6. ^{''} 67

1866-diki szembenállás

septemb.	4.43	Krakó	—1. ^s 26	—8. ^{''} 4
	5.39	"	—1.53	—10.8
	8.36	"	—1.16	—9.3
	13.45	"	—0.94	—7.8
	14.38	"	—1.18	—10.6
	17.42	"	—1.25	—1.5
október	1.40	Berlin	—0.94	—8.6
	2.46	"	—0.85	—7.7
septemb.	16.08	középsz.	—1. ^s 134	—7. ^{''} 79

1867-diki szembenállás

novemb. 16.44	Lund	—0. ^s 71	+0. ^{''} 1
19.75	Washington	—0.65	—3.7
21.44	Lund	—0.50	+1.9
22.34	"	—0.61	—0.7
26.69	Cambr. U. S.	—0.56	—1.7
27.49	Leiden	—0.50	+1.3
29.38	Lund	—0.71	—0.1
30.46	Lipcese	—0.48	+2.3
deczemb. 2.70	Washington	—0.70	—0.9
3.44	Lund	—0.54	—2.4
5.69	Washington	—0.54	—2.6
novemb 26.89	középsz.	—0. ^s 591	—0. ^{''} 59

1869-diki szembenállás

február 18.52	Durham	—0. ^s 38	+0. ^{''} 6
20.48	Lund	—0.62	+3.0
27.48	"	—0.62	+4.5
márcz. 1.50	"	—0.53	+2.8
1.51	Lipcese	—0.33	+4.7
6.55	Hamburg	—0.25	+2.5
8.48	Kremsmünster	—0.39	+2.6
9.48	"	—0.31	+1.3
10.47	Hamburg	+0.04	+1.5
17.45	Kremsmünster	—0.32	+0.6
18.47	Durham	—0.43	—0.4
márczius 5.12	középsz.	—0. ^s 376	+2. ^{''} 15

Ha most a naplójavítások kitett középszámait az illető napló azon adataihoz adjuk, melyeknek keltje az időközépszámhoz legközelebb, akkor a normálhelyek sorozata következőleg folytatódik :

sz.	berlini köz.idő	látsz. egyen.em.	látsz. elhajlás	észl. száma
V.	1863 február 12.0 ^h	103°47' 43."70	+20°18' 35."13	23
VI.	1864 április 17.	202 33 55.47	+1 42 55.97	19
VII.	1865 július 19.	267 11 49.35	—17 43 9.63	10
VIII.	1866 septbr. 16.	337 28 39.54	—15 6 13.76	9
IX.	1867 novbr. 27.	59 10 42.14	+9 38 52.33	11
X.	1869 márcz. 5.	164 34 51.96	+13 10 3.45	11

Hogy a normálhelyeket közös éjegyekre vigyük át, még pedig az I—VII normálhelyeket az 1858-ki s a VII—X normálhelyeket az 1870-diki közép éjegyekre (ez utóbbi éjegy választása felett l. a következő cikket) a következő mennyiségeket le kell vonnunk belőlök:

+ präcessio 1858.0 óta + nutatio

norm. h.	α -ból	δ -ból
I.	+0' 12."07	—0."93
II.	+1 14.91	—23.38
III.	+2 28.43	+27.59
IV.	+3 5.68	+1 19.79
V.	+4 51.28	—28.52
VI.	+4 59.59	—1 59.01
VII.	+6 44.94	+1.11

— präcessio 1870.0-ig + nutatio

VII.	—3' 44."54	+12."89
VIII.	—2 39.61	—57.21
IX.	—1 48.79	—30.75
X.	—0 51.29	+18.76

Levonván ezen értékeket látszólagos normálhelyeinkből erednek így a következő

közép normálhelyek:

Sz.	berlini köz. idő	egyen. emelk.	elhajlás
		1858-diki éjegy	
I. 1858 febr.	15.0	160° 0' 23."04	+ 13° 13' 19."48
II. 1859 május	20.48	235 24 17.36	— 9 9 59.14
III. 1860 július	22.95	303 9 58.86	— 18 17 33.08
IV. 1861 oktob.	7.81	14 49 49.45	— 4 15 51.50
V. 1863 febr.	12.0	103 42 52.42	+ 20 19 3.65
VI. 1864 ápril.	17.0	202 28 55.88	+ 1 44 54.98
		1870.0-diki éjegy	
VII. 1865 július	19.0	267 15 33.89	— 17 43 22.52
VIII. 1866 sept.	16.0	337 31 19.15	— 15 5 16.55
IX. 1867 novbr.	27.0	50 12 30.93	+ 9 39 23.08
X. 1869 márcz.	5.0	164 35 43.25	+ 13 9 44.69

A háborok kiszámítása.

A bolygó különleges (specialis) háborait az Encke-féle módszer szerint: derékszögű összrendezőkben számítottuk ki. *) Alapsikul az egyenlítő választatott, s a tengelyrendszer a szokásos módon, t. i. X tengely tevőlegesen vége a tavaszi pontban, Y tengelyé 90°-nyi egyenes emelkedésben, Z tengelyé éjszak felé helyeztetett, még pedig az 1858.0-diki közép éjegygenre vonatkozólag. Érintési időpontul 1858-diki január 0.0 (berl. k. idő) vétetett, s az ez értelembeni Jupiter és Saturn által Európa bolygóra gyakorolt háborok — az első öt év számára — tölem a bécsi cs. tud. akadémia értesítőjében közöltettek. Az 1865-ig érő folytatást most toldom ide.

Jelöljük ξ_0 , η_0 , ζ_0 -val a háboroknak a fent leirt összrendezői rendszerre vonatkozó értékeit, — ξ , η , ζ — betűket megtartván ugyanazon háboroknak jelölésére vonatkozólag a nappályára.

berlini 0. ^b		ξ_0	η_0	ζ_0
		(7-ik tizedes egys.)		
1863. márcz.	20	+248220	+166237	+31963
april	19	+232132	+185745	+40265
május	19	+213554	+202752	+47960
junius	18	+192964	+216961	+54896
julius	18	+170874	+228176	+60953
august.	17	+147810	+236303	+66044
sept.	16	+124283	+241343	+70112
október	16	+100772	+243382	+73138
novemb.	15	+77708	+242574	+75125
deczemb.	15	+55464	+239130	+76105
1864. január	14	+34346	+233295	+76127
február	13	+14595	+225342	+75255
márczius	14	—3616	+215547	+73561
april.	13	—20176	+204187	+71124
május	13	—35026	+191520	+68020
junius	12	—48166	+177786	+64325

*) L. „Berliner astronomisches Jahrbuch für 1858.“

berlini 0. ^h		ξ_0	η_0	ζ_0
		(7-dik tizedes egys.)		
julius	12	—59633	+163193	+60105
august	11	—69501	+147917	+55422
sept.	10	—77871	+132096	+50324
október	10	—84864	+115833	+44851
novemb.	9	—90615	+99192	+39028
decemb.	9	—95264	+82198	+32872
1865 január	8	—98951	+64846	+26387
február.	7	—101807	+47096	+19570
márcz.	9	—103950	+28885	+12410
ápril.	8	—105475	+10126	+4891
május	8	—106449	—9283	—3009
junius	7	—106901	—29455	—11311
julius	7	—106824	—50508	—20041
august.	6	—106162	—72556	—29223
sept.	5	—104934	—95703	—38881

Az 1865-diki szénbenállás multával a háborok számitása kezdettől fogva ismételtetett. Miután t. i. az első években 1858-tól fogva a háborítási számitásban csak kevésbé szoros elemekkel rendelkezhetünk, azt kellett sejdítenünk, hogy ezen körülmény következtében a számitás eredménye időjárással mindinkább hibássá leend; s tetteleg meggyőződünk arról, miszerint ha a fentebbi háborok vétetnek fel, már az első hat normálhely (I—VI) bármely elemrendszer által nem állítható elő a nélkül, hogy a normálhelyekben akkora hibák ne maradnának hátra, melyek azoknak szorosságával éppen nem egyeztethetők meg.

Ezen újabb számitás alapjául az Ia) elemek vétettek. Azonkívül Jupiter és Saturn háborító bolygók összrendezői szintén újra számitattak ki, a hol t. i. ezeknek első számitásunkban használt értékei eléggé szorosaknak nem látszottak lenni, úgy hogy az ekkép nyert összrendezők $-(x' y' z')$ — a háborítási számitásnak tán ujonnan szükségelt ismétlésére fognak szolgálhatni. Mi e számok felsorolását tér szűke miatt mellőzendőnek tartjuk s csak azt jegyezzük meg, hogy a berlini évkönyv adataiból számitattak ki, még pedig a következő képletek segélyével:

$$x' = r' \cos b. \cos l$$

$$y' = r' \cos b. \sin l. \frac{\cos(e + \theta)}{\cos \theta} \quad \text{tang} \theta = \frac{\text{tang} b}{\sin l}$$

$$z' = r' \cos b. \sin l. \frac{\sin(e + \theta)}{\cos \theta}$$

r' itt a háborító bolygó naptóli távolságát, l ugyanannak 1858.0-diki közép hosszúságát, b 1858.0-diki szélességét, e a nappálya 1858.0 diki közép ferdeségét (Bessel szerint) — jelentik, θ pedig segédszöget jelöl. Együttal a háborító bolygók tömegeinek elsőbbi számításunkban használt értékei helyébe biztosabb értékeket vettünk fel, még pedig az ott használt Nicolai-féle Jupiter tömege helyett a Bessel-féle $\frac{1}{1047.879}$ és az ott használt, Bessel első határozásából eredő Saturn tömege helyett annak második határozásából eredő $\frac{1}{3501.6}$ — értékeket.

Ezek által a következő (szintén az egyenlítőre s az 1858.0 éjegyenre vonatkoztatott) különleges háborokat nyertük :

(Érintés 1858. jan. 0.0)

berlini 0. ^h		ξ_0	η_0	ζ_0
		(7. tizedes egységében)		
1858 január	15	—1	—5	—2
február	14	—6	—45	—20
márczius	16	—16	—127	—57
április	15	—30	—249	—114
május	15	—48	—413	—189
junius	14	—71	—617	—284
julius	14	—98	—861	—398
augustus	13	—132	—1143	—530
septemb.	12	—176	—1465	—679
október	12	—234	—1825	—846
novemb.	11	—313	—2228	—1029
decz.	11	—418	—2677	—1230
1859 január	10	—555	—3178	—1448
február	9	—731	—3738	—1686
márczius	11	—953	—4370	—1946
április	10	—1225	—5086	—2231

berlini 0. ^h		ξ ₀	η ₀	ζ ₀
		(7. tizedes egységében)		
május	10	—1550	—5901	—2546
junius	9	—1929	—6834	—2895
julius	9	—2360	—7903	—3286
augustus	8	—2839	—9131	—3724
septemb.	7	—3356	—10540	—4218
október	7	—3900	—12155	—4777
novemb.	6	—4451	—13998	—5410
deczemb.	6	—4988	—16095	—6126
1860 január	5	—5483	—18469	—6937
február	4	—5902	—21141	—7851
márczius	5	—6206	—24131	—8880
április	4	—6350	—27456	—10032
május	4	—6280	—31128	—11318
junius.	3	—5940	—35155	—12744
julius.	3	—5265	—39538	—14318
august.	2	—4186	—44271	—16044
septemb.	1	—2626	—49340	—17925
oktob.	1	—506	—54719	—19960
"	31	+2258	—60372	—22145
novb.	30	+5754	—66250	—24473
decz.	30	+10069	—72290	—26931
1861 január	29	+15291	—78410	—29500
február	28	+21503	—84515	—32156
márczius	30	+28784	—90488	—34869
április	29	+37202	—96192	—37600
május	29	+46811	—101475	—40301
junius	28	+57647	—106159	—42918
julius	28	+69721	—110053	—45387
augustus	27	+83015	—112945	—47635
septemb.	26	+97475	—114615	—49583
október	26	+113005	—114831	—51143
novemb.	25	+129462	—113363	—52224
decz.	25	+146651	—109988	—52730
1862 január	24	+164322	—104503	—52567
február	23	+182166	96732	—51646
márcz.	25	+199824	—86549	—49888

berlini 0. ^b		ξ_0	η_0	ζ_0
		(7. tizedes egységében)		
1862 április	24	+216888	—73811	—47226
május	24	+232913	—58730	—43618
junius	23	+247431	—41181	—39045
julius	23	+259970	—21408	—33517
august.	22	+270080	+315	—27083
septemb.	21	+277351	+23629	—19823
október	21	+281444	+48084	—11856
novemb.	20	+282108	+73166	—3331
deczemb.	20	+279203	+98316	+5575
1863 január	19	+272706	+122951	+14667
február	18	+262720	+146498	+23737
márczius	20	+249463	+168419	+32581
április	19	+233262	+188238	+41001
május	19	+214528	+205558	+48819
junius	18	+193735	+220075	+55882
julius	18	+171398	+231588	+62067
augustus	17	+148039	+239996	+67283
septemb.	16	+124173	+245293	+71475
október	16	+100280	+247557	+74616
novemb.	15	+76796	+246938	+76711
decz.	15	+54098	+243640	+77788
1864 január	14	+32498	+337906	+77894
február	13	+12242	+230002	+77090
márczius	14	—6488	+220206	+75449
április	13	—23575	+208789	+73046
május	13	—38957	+196012	+69959
junius	12	—52624	+182113	+66260
julius	12	—64607	+167301	+62018
augustus	11	—74973	+151754	+57291
septemb.	10	—83819	+135612	+52131
október	10	—91260	+118979	+46575
novemb.	9	—97427	+101921	+40650
decz.	9	—102454	+84470	+34373
1865 január	8	—106477	+66621	+27749
február	7	—109626	+48340	+20776
márczius	9	—112015	+29566	+13444

berlini 0. ^h		ξ_0	η_0	ζ_0
(7. tizedes egység.)				
április	8	—113735	+10216	+5736
május	8	—114851	—9807	—2365
júnus	7	—115392	—30613	—10883
július	7	—115347	—52315	—19840
augustus	6	—114660	—75024	—29258
septemb.	5	—113228	—98842	—39161

Ha ezen számtár utolsó értékeit az előbbiekkal (12.l.) hasonlítjuk össze, meglehetősen különbségek tűnnek szemünkbe.

Az első hét normálhely számára közbeiktatás által lesz :

sz.	idő	ξ_0	η_0	ζ_0
I.	1858 febr. 15.0	—6	—48	—21
II.	1859 máj. 20.48	—1676	—6210	—2664
III.	1860 július 22.95	—4597	—42647	—15450
IV.	1861 okt. 7.81	+103469	—114886	—50248
V.	1863 febr. 12.0	+246990	+141904	+21935
VI.	1864 ápril. 17.0	—25725	+207158	+72673
VII.	1865 július 19.0	—115152	—61272	—23551

Kényelmesebb s részint biztosabb számítás kedvéért is az Ia) elemeket eddigi érintési pontjuktól: 1858. január 0.0-tól egy későbbi, még pedig 1865-dik év kezdetéhez közeleli időpontra visszük át. Hogy pedig a berlini évkönyv szerkesztősége által évenként közölt x'y'z'-mennyiségeket tartalmazó segéd táblákat alkalmazhassuk, új érintési időpont gyanánt 1865. január 17.0 vesszük fel. Ezen segéd táblák nem az egyenlítőre vonatkoznak, hanem a nappályára, még pedig 1865 óta az 1870-diki nappályá ferdeségére és közép éjegyenre, a mely körülményből, valamint abból, hogy a megnevezett szerkesztőség által másféle segéd táblák is közöltetnek évenként, t. i. olyanok, melyek a közép éjegyenre vonatkozó földközepi bolygóhelyeknek a látszólagos éjegyenre való átváltoztatására szolgálnak, s melyek 1865-től fogva szintén az 1870-diki közép éjegyentől indulnak ki a következőkben előforduló 1870-diki közép éjegylen magyaráztatik meg.

Valamint egy bolygó elemeiből bizonyos időpont számára annak derékszögü összerendezői s nem különben sebességei t. i.

$$x, y, z, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

ismert egyenletekből számíttathatnak ki, úgy megfordítva ugyanazon egyenletekből indulván ki, az ép idézett hat mennyiségből a bolygó elemeit származtathatjuk le. *)

Hogy tehát 1858. január 0.0-időpontban érintkező elemrendszerünket az 1865-diki január 17.0-időpontban érintkező elemrendszerre változtassuk, nincs egyéb dolgunk, mint kiszámítanunk Ia) alatti elemekből 1865. január-időpont számára a bolygónak a nappályára vonatkozó derékszögü összrendezőit és sebességeit, s többítnünk ezeket sorban a következő hat mennyiséggel:

$$\xi, \eta, \zeta, \quad \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt},$$

melyek ugyanazon időpont számára kerestetnek ki a szám-tárból, s számítanunk az

$$x+\xi, y+\eta, z+\zeta, \quad \frac{d(x+\xi)}{dt}, \quad \frac{d(y+\eta)}{dt}, \quad \frac{d(z+\zeta)}{dt}$$

összegekből — mint a bolygó valódi (azaz háborított) összrendezői- és sebességeiből a megkívánt elemrendszert. Ugyanis az összrendezők s sebességek, melyek a kerüléki mozgás képleteivel, helyettesítvén ezekben az így nyert elemrendszert, 1865. január 17.0-időpontra számíttatnak, azonosak lesznek azokkal, melyekkel a bolygó a megnevezett időben valóban birt, azaz: az új elemrendszer a megnevezett időpontban érintkezni fog.

1865-ki január 0.0 számára Ia) elemekből Európa bolygónak következő, a nappályára vonatkozó összrendezői, (+X tengelyt az éjegyempontba, +Y-t 90°-nyi hosszúságba, +Z-t a nappályá éjszaki sarkába helyezve) számíttatnak ki:

$$x = -1.2320586 \quad y = -3.0920298 \quad z = -0.3811430;$$

a fentebbi háborok számsorzatából továbbá közbeiktatás s a

*) L. „Berliner astronomisches Jahrbuch für 1858.“

nappályára való átváltoztatás útján — ugyanazon időpont számára — ered:

$$\xi = -107508 \quad \eta = +66355 \quad \zeta = -785$$

tehát:

$$x + \xi = -1.2428094 \quad y + \eta = -3.0853943 \quad z + \zeta = +0.3810645.$$

Hasonlag az Ia) elemekből nyeretik:

$$\frac{dx}{dt} = +0.008112027 \quad \frac{dy}{dt} = -0.003893266 \quad \frac{dz}{dt} = -0.000483655,$$

s a háborok számtárából a különbözőki hányadosok közbeiktatására szolgáló képletek segélyével (9-diki tiz. egys.)

$$\frac{d\xi}{dt} = -11031 \quad \frac{d\eta}{dt} = -64775 \quad \frac{d\zeta}{dt} = +3028,$$

tehát:

$$\frac{d(x+\xi)}{dt} = +0.008100996 \quad \frac{d(y+\eta)}{dt} = -0.003958041 \quad \frac{d(z+\zeta)}{dt} = -0.000480627.$$

Ezen mennyiségek következő czikkben felhozott Ib) elemrendszerünket adják; Ib) és Ia) elemrendszerek között pedig a következő különbségek vannak:

Ib) - Ia)

$$\begin{aligned} \Delta M \text{ 1865. jan. 17.0} &= -2^{\circ}44'18.''37 \\ \Delta \pi &= +2 \quad 8 \quad 58.03 \\ \Delta \Omega &= + \quad 10 \quad 58.33 \\ \Delta i &= + \quad \quad \quad 3.87 \\ \Delta \varphi &= + \quad 1 \quad 19.40 \\ \Delta \log a &= + 0.0009703 \\ \Delta \mu &= - 2.''1749 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1858.0$$

melyek a háboroknak az elemekre való befolyását tüntetik ki — 1858. jan. 0.0-tól fogva egész 1865. jan. 17.0-ig.

Az Ib) elemrendszerrel — 1866. nov. 18. óta pedig IIb) elemrendszerrel — s a fennemlített segédtáblákkal az új érintési pontból kiinduló háborok következőleg erednek:

(Érintés 1865. jan. 17.0)

berlini 0. ^a	ξ	η	ζ
	(7. tizedes egységében)		
1865. január 7	-5	-28	-5
„ 27	-5	-28	-5

berlini O. ^h	ξ	η	ζ
	(7. tizedes egységében)		
febr. 16	—50	—255	—50
márcz. 8	—146	—717	—138
" 28	—301	—1422	—271
april. 17	—522	—2378	—447
május 7	—814	—3591	—663
" 27	—1182	—5070	—917
junius 16	—1629	—6820	—1204
julius 6	—2154	—8848	—1521
" 26	—2757	—11160	—1862
aug. 15	—3431	—13759	—2222
septb. 4	—4166	—16650	—2597
" 24	—4952	—19836	—2982
oktob. 14	—5772	—23317	—3370
nov. 3	—6609	—27092	—3759
" 23	—7439	—31161	—4144
decz. 13	—8240	—35517	—4520
1866. január 2	—8985	—40154	—4886
" 22	—9644	—45062	—5239
febr. 11	—10190	—50228	—5576
márcz. 3	—10590	—55635	—5897
" 23	—10815	—61264	—6201
april. 12	—10833	—67091	—6488
május 2	—10615	—73087	—6757
" 22	—10133	—79220	—7011
junius 11	—9363	—85454	—7249
julius 1	—8281	—91750	—7472
" 21	—6869	—98062	—7683
aug. 10	—5114	—104344	—7883
" 30	—3008	—110544	—8073
sept. 19	—549	—116608	—8255
oktob. 9	+2257	—122482	—8429
" 29	+5398	—128108	—8595
nov. 18	+8851	—133430	—8754
decz. 8	+12586	—138390	—8904
" 28	+16563	—142936	—9043
1867. január 17	+20732	—147017	—9170

berlini 0. ^h	ξ	η	ζ
	(7. tizedes egységében)		
febr. 6	+25003	—150588	—9279
" 26	+29396	—153610	—9366
márcz. 18	+33743	—156054	—9423
ápril. 7	+37986	—157902	—9443
" 27	+42030	—159147	—9416
május 17	+45774	—159798	—9331
junius 6	+49113	—159880	—9175
" 26	—51937	—159436	—8935
julius 16	+54142	—158530	—8596
august. 5	+55623	—157243	—8141
" 25	+56285	—155681	—7555
sept. 14	+56043	—153970	—6821
oktob. 4	+54828	—152254	—5922
" 24	+52592	—150700	—4844
nov. 13	+49307	—149489	—3572
decz. 3	+44975	—148814	—2095
" 23	+39628	—148878	—403
1868. január 12	+33333	—149889	+1508
febr. 1	+29191	—152051	+3639
" 21	+18340	—155560	+5988
márcz. 12	+9954	—160598	+8544
ápril. 1	+1239	—167324	+11294
" 21	—7564	—175866	+14218
május 11	—16192	—186322	+17289
" 31	—24359	—198744	+20476
junius 20	—31766	—213143	+23743
julius 10	—38109	—229482	+27049
" 30	—43087	—247674	+30349
aug. 19	—46409	—267586	+33596
sept. 8	—47864	—289038	+36740
" 28	—47029	—311806	+39733
oktob. 18	—43871	—335632	+42525
nov. 7	—38161	—360225	+45070
" 27	—29768	—385269	+47322
decz. 17	—18613	—410433	+49243
1869. január 6	—4659	—435377	+50795

berlini 0. ⁿ	ξ	η	ζ
	(7. tizedes egységében)		
január 26	+12082	—459758	+51947
febr. 15	+31552	—483242	+52675
márcz. 7	+53648	—505505	+52959
„ 27	+78233	—526241	+52786
ápril. 16	+105129	—545171	+52149
május 6	+134133	—562038	+51045
„ 26	+165012	—576620	+49480
junius 15	+197516	—588725	+47462
julius 5	+231377	—598192	+45005
„ 25	+266318	—604899	+42127
aug. 14	+302059	—608753	+38851
sept. 3	+338313	—609695	+35201
„ 23	+374801	—607697	+31204
oktob. 13	+411247	—602759	+26891
nov. 2	+447383	—594909	+22293
„ 22	+482953	—584200	+17442
decz. 12	+517713	—570708	+12373
1870.január 1	+551436	—554526	+7117
„ 21	+583906	—535769	+1710
febr. 10	+614928	—514564	—3815
márcz. 2	+644321	—491053	—9426
„ 22	+671923	—465387	—15090
ápril. 11	+697587	—437730	—20776
május 1	+721186	—408248	—26453
„ 21	+742607	—377116	—32092
junius 10	+761756	—344512	—37666
„ 30	+778554	—310615	—43149
jul. 20	+792937	—275606	—48514
aug. 9	+804855	—239666	—53739
„ 29	+814273	—202974	—58802
sept. 18	+821170	—165710	—63682
okt. 8	+825538	—128046	—68361
„ 28	+827380	—90155	—72820
nov. 17	+826709	—52202	—77044
decz. 7	+823551	—14351	—81019
„ 27	+817940	+23242	—84730

berlini 0. ^h		§	η	ζ
(7. tizedes egységében)				
1871. jan.	16	+809919	+60427	—88168
febr.	5	+79542	+97057	—91320
"	25	+786868	+132994	—94179
márcz.	17	+771964	+168105	—96736
ápril.	6	+754904	+202266	—98985
"	26	+735767	+235358	—100920
május	16	+714637	+267269	—102538
junius	5	+691603	+297896	—103835
"	25	+666759	+327143	—104809
julius	15	+640202	+354919	—105460
aug.	4	+612031	+381142	—105786
"	24	+582347	+405737	—105790
sept.	13	+551253	+428637	—105471
oktob.	3	+518854	+449782	—104832
"	23	+485255	+469117	—103877
nov.	12	+450561	+486595	—102609
decz.	2	+414876	+502176	—101032
"	22	+378303	+515825	—99150
1872. január	11	+340944	+527512	—969 8
"	31	+302898	+537215	—94491
febr.	20	+264263	+544914	—91725
márcz.	11	+225133	+550595	—88676
"	31	+185598	+554245	—85349

Ezen, a nappályára vonatkozó mennyiségekből a VII—X normálhelyek számára közbeiktatás s az egyenlítőre való átváltoztatás által nyerjük:

sz.	idő	§ ₀	η ₀	ζ ₀
VII.	1865 julius 19.0	—2537	—8773	—5703
VIII.	1866 sept. 16.0	—940	—102872	—53605
IX.	1867 nov. 27.0	+46384	—135622	—61637
X.	1869 márcz. 5.0	+51323	—482828	—151778

a mely számok a normálhelyeknek az elemekkel történt összehasonlításában használtattak.

A VII. normálhely mind a) mind b) érintkezésü elemekkel hasonlítottatott össze, s az innét eredő eléggé összevágó számok középértéke a későbbiekben van felhozva.

Az érintési pontnak 1872. január 1. 0-séjére való ujonnan átvivése számára a IIIb) elemek s a háborok fentebbi számtára ezt szolgáltatják:

1872. január 1. 0 időpontban

$x = +2.8392350$	$y = -1.6990329$	$z = -0.1413401$
$\xi = +359716$	$\eta = +521915$	$\zeta = -98096$
$x + \xi = +2.8752066$	$y + \eta = -1.6768414$	$z + \zeta = -0.1511497$
$\frac{dx}{dt} = +0.004000918$	$\frac{dy}{dt} = +0.008141668$	$\frac{dz}{dt} = -0.001078889$
$\frac{d\xi}{dt} = -186815$	$\frac{d\eta}{dt} = +58440$	$\frac{d\zeta}{dt} = +10911$
$\frac{d(x+\xi)}{dt} = +0.003814103$	$\frac{d(y+\eta)}{dt} = +0.008200108$	$\frac{d(z+\zeta)}{dt} = -0.001067978$

s átmenvén az elemekre nyeretik IIIc) elemrendszer, melyből kivonván IIIb) elemrendszert, lesz:

IIIc) — IIIb)

ΔM	1872. január 1. 0	$= -1^{\circ} 2' 51.''34$
$\Delta \pi$		$= +2 \ 21 \ 40.06$
$\Delta \Omega$		$= -10 \ 34.40$
Δi		$= +1 \ 48.77$
$\Delta \varpi$		$= +15 \ 15.91$
$\Delta \log a$		$= -0.0011551$
$\Delta \mu$		$= +2.''59014$

s pedig mint az 1865. január 17. 0-tól fogva egész 1872. jan. 1. 0-ig tartó időközön át megnövvő háborok elemekbeni kifejezése.

Ujra kiindulván ez utóbbi érintési pontból nyerjük mint az innen kezdődő háborok első adatait:

(Érintés 1872. jan. 1.0)

berlini 0. ^h	ξ	η	ζ
1872. január 11	+1	—3	0
„ 31	+6	—29	0
febr. 20	+17	—80	+1
márcz. 11	+34	—156	+2
„ 31	+59	—255	+3

a mely számok IIIc) elemrendszerünk legszorosabb ellenőrzésére szolgáltak.

Az elemek javítása.

Kiindulási elemekül e következők szolgáltak:

Ia) elemek

érintés } 1858. jan. 0.0 (berlini k. i.)
időpont }

$$\begin{aligned}
 M &= 34^{\circ} 25' 7''.27 \\
 \pi &= 101 \ 56 \ 14.77 \\
 \Omega &= 129 \ 57 \ 16.03 \\
 i &= 7 \ 24 \ 41.03 \\
 \varphi &= 5 \ 49 \ 14.30 \\
 \log a &= 0.4913564 \\
 \mu &= 650''.0877
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} M \\ \pi \\ \Omega \\ i \\ \varphi \\ \log a \\ \mu \end{aligned}} \right\} 1858 \text{ 0 köz. éjegylen}$$

M a bolygó közép eltérését az időpont (epocha)ban, π a nap közel-, Ω a felszálló csomó hosszát, i a pályahajlást, φ az ívet, melynek sinusa egyenlő a pálya középküliségével, a a bolygó közép távolát a naptól, μ a bolygó napi közép mozgását jelentik. Ezen elemrendszert a földtől távolságok változásának módszerével nyertük, előállítván általa tökéletesen az I és III. normálhelyt s úgy változtatván a hozzájuk tartozó földtől távolságokat, hogy a II, IV és V. normálhely (a legkisebb négyzetek módszere értelmében) lehető legjobban elégítessék ki.

Miután az előbbiekhöz még két szembenállás járult, szigorú elemjavításhoz fogtunk.

A képleteket, melyek szerint az egyenes emelkedés- és elhajlásnak különbzéki hányadosai a pálya hat eleme szerint számítottak, „az 1860. II. üstökös definitív pályaszámítása“ című értekezésünkben származtattuk le, s ide még csak azt kell toldanunk, a mi azt illeti, hogy itt bolygópályával s nem üstökőspályával van dolgunk.

Az idézett értekezésben előforduló v -mennyiség a bolygópályára nézve a következő három: M , μ és φ elemnek lesz képviselője. Ha most t az időpont óta lefolyt időt, p a félgóc-hurt, v a bolygó valódi eltérését, r a nap és a bolygó közötti távolságot jelöli, akkor a kerüléki mozgás alapegyenleteiből a különbzékelés utján ered:

$$\begin{cases} dv = \frac{a \cos \varphi}{r r} dM + \frac{a \cos \varphi}{r r} t d\mu + \frac{a(r+p)}{r p} \sin v \cdot \cos \varphi d\varphi \\ dr = a \tan \varphi \sin v \cdot dM - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{r}{\mu} - a \tan \varphi \sin v \cdot t \right) d\mu - a \cos v \cos \varphi d\varphi \end{cases}$$

Ezen egyenletek a következő relatióban

$$r \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt} \tan N$$

előforduló N betű háromféle meghatározását szolgáltatják:

$$M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tan N' = \frac{\cot \varphi}{\sin E}$$

$$\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tan N'' = - \frac{p \cdot \cos W}{r \sin \varphi \sin (W - v)}$$

$$\left(\tan W = \frac{2r \sqrt{p}}{3xt \sin \varphi \cos v} \right)$$

$$\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tan N''' = - \frac{r+p}{p} \tan v$$

a hol E a középküli eltérést, x pedig $+0.0172021$ -állandó számot jelentik.

Továbbá tekintve az idézett képleteket, lesz:

$$-\frac{dr}{dM} = -a \tan \varphi \sin v, \quad -\frac{dr}{d\mu} = a \tan \varphi \cdot t \cdot \frac{\sin(W-v)}{\cos W}, \quad -\frac{dr}{d\varphi} = a \cos \varphi \cos v$$

Mi azonban olyan egyenletekből is indulhatnánk ki, melyek v és r változásait dM' , $d\mu$, $d\varphi$ által fejezik ki, dM' -változással a t időhöz tartozó közép eltérés változását jelölván,

mialatt dM az epochábani közép eltérésnek változását jelenté,
s mely két változás között $M' = M + t\mu$

egyenlet folytán a következő áll: $dM' = dM + t d\mu$

(mi t. i. az elemek változásainak befolyását vizsgáljuk nem változó időkhöz.)

Az említett egyenletek a következők:

$$\begin{cases} dv = \frac{a \cos \varphi}{rr} dM' + \frac{a(r+p)}{rp} \sin \nu \cos \varphi d\varphi \\ dr = -\frac{2}{3} \cdot \frac{r}{\mu} \cdot d\mu + a \operatorname{tg} \varphi \sin \nu \cdot dM' - a \cos \varphi \cos \nu \cdot d\varphi \end{cases}$$

s ezekből:

$$M' \dots \dots \operatorname{tg} N' = \text{előbbi értékével}$$

$$\mu \dots \dots \operatorname{tg} N'' = 0$$

$$\varphi \dots \dots \operatorname{tg} N''' = \text{előbbi értékével.}$$

Kikerüljük ez uton N'' szög számítását, de utólag az egyenes emelkedés és elhajlás ebbeli változásait

$$\frac{d\alpha}{dM'} \cdot dM' \text{ és } \frac{d\delta}{dM'} \cdot dM'$$

következőképp fel kellend bontanunk:

$$\frac{d\alpha}{dM'} \cdot dM' = \frac{d\alpha}{dM'} \cdot (dM + t d\mu) = \frac{d\alpha}{dM'} \cdot dM + \frac{d\alpha}{dM'} \cdot t \cdot d\mu$$

$$\frac{d\delta}{dM'} \cdot dM' = \frac{d\delta}{dM'} \cdot (dM + t d\mu) = \frac{d\delta}{dM'} \cdot dM + \frac{d\delta}{dM'} \cdot t \cdot d\mu,$$

s a $d\mu$ -vel tagokat egybekapcsolunk az előbb N''' által nyert értékekkel.

Továbbá minthogy különbzéki képleteinkben nem i , Ω és π szögeket, melyek a pálya fekvését a nappályára vonatkozólag adják, hanem i_0 , Ω_0 és π_0 szögeket, melyek a pálya fekvését az egyenlítőre vonatkozólag adják, használtuk, úgy az előbbieket át kell változtatnunk az utóbbiakra, a mi azon gömbháromszög megoldása által történik, mely a nappálya, a bolygópálya s az egyenlítő által képeztetik. Erre nézve a következő egyenletek állanak:

$$\cos \frac{1}{2} i_0 \cdot \cos \frac{1}{2} (A_0 + \Omega_0) = \cos \frac{1}{2} (e + i) \cos \frac{1}{2} \Omega$$

$$\cos \frac{1}{2} i_0 \cdot \sin \frac{1}{2} (A_0 + \Omega_0) = \cos \frac{1}{2} (e - i) \sin \frac{1}{2} \Omega$$

$$\sin \frac{1}{2} i_0 \cdot \cos \frac{1}{2} (A_0 - \Omega_0) = \sin \frac{1}{2} (e + i) \cos \frac{1}{2} \Omega$$

$$\sin \frac{1}{2} i_0 \cdot \sin \frac{1}{2} (A_0 - \Omega_0) = \sin \frac{1}{2} (e - i) \sin \frac{1}{2} \Omega$$

melyekben (e) a nappálya ferdeségét jelenti, A_0 azonban azon szöget, melyet az egyenlítőben s a nappályában fekvő csomóvonalak egymással képeznek, s mely

$$A_0 = \pi_0 - \Omega_0 - (\pi - \Omega)$$

egyenlet segítségével π_0 -szög ismeretére vezet.

Fentebb kitett Ia) elemrendszerünk érintéspontjának átvitele által a következőbe megy át:

Ib) elemek.

érintés 1865. jan. 17.0 (berlini k. i.) *)

időpont 1865. jan. 0 0 " " "

M = 133° 25' 59." 90

π = 104 15 16.00

Ω = 129 55 51.70

i = 7 24 40.80

1870.0

*) Ezen, január 17.0-dikén érintkező s amaz a berlini (1869) évkönyvben közölt 1858. január 8.0 dikán érintkező elemrendszer között — tekintve a háborokat 1858. jan. 17.0 érintésponttól visszafelé jan. 8.0-ig — E n c k e képletei szerint (berlini 1858. évkönyv) következő különbségek találtatnak; a háborok, melyek elsőrendű kis mennyiségeknek tekinthetők, ezek:

$$\delta x = -0.0000004,$$

$$\delta y = -0.0000023,$$

$$\delta z = -0.0000004$$

$$\delta \frac{dx}{dt} = +0.0000000915, \quad \delta \frac{dy}{dt} = +0.0000004980, \quad \delta \frac{dz}{dt} = +0.0000000965$$

s átváltoztatva az elemek változásaiá adják:

érintés jan. 8 — jan. 17.

$$\delta M \text{ jan. 8.} = +2' 11." 43$$

$$\delta \pi = -1 50.06$$

$$\delta \Omega = + 22.98$$

$$\delta i = - 1.53$$

$$\delta \varphi = - 2.23$$

$$\delta \log a = -0.0000122$$

$$\delta \mu = +0." 0272$$

$$\begin{aligned}\varphi &= 5^{\circ}47'54''.90 \\ \log a &= 0.4923267 \\ \mu &= 647''.9128\end{aligned}$$

(az 1870.0 éjegyén választása felett l. az előbbi cikket) s az ép leirt átváltoztatás eredménye ez:

Ia)	Ib)
$i_0 = 19^{\circ}29'46''.00$	$i_0 = 19^{\circ}29'49''.66$
$\Omega_0 = 17\ 14\ 2.75$	$\Omega_0 = 17\ 24\ 20.81$
$\pi_0 = 103\ 6\ 30.43$	$\pi_0 = 105\ 25\ 32.76$

{
1858.0
1870.0

— a nappálya ferdeségeül következő értékek vétettek fel:

$$e = 23^{\circ}27'28''.29 \qquad e = 23^{\circ}27'21''.70$$

Ezen I-ső — a) és b) érintkezésű — elemrendszerünk s I—VIII normalhelyeink közötti egyenes összehasonlítás — az elemeknek az észleletektől következő eltéréseit tüntette ki:

szám	$\alpha(o-c)$	$\delta(o-c)$
I.	+1''.03	—0''.34
II.	+7.52	—2.94
III.	+1.22	+0.28
⊙ . . . IV.	+6.68	+1.58
V.	+16.03	—0.97
VI.	+20.41	—6.27
VII.	+20.87	—1.04
VIII.	+17.75	+4.89

Ha most ezen értékeket s nem különben a különbözőki hányadosokéit egymásután helyettesítjük

$$0 = -(o-c) + \frac{dC}{di_0} \cdot di_0 + \frac{dC}{d\Omega_0} \cdot d\Omega_0 + \frac{dC}{d\pi_0} \cdot d\pi_0 + \frac{dC}{dM_0} \cdot dM_0 + \frac{dC}{d\varphi} \cdot d\varphi + \frac{dC}{d\mu} \cdot d\mu$$

egyenletben (M_0 alatt 1858. jan. 0.0 időpontbani közép eltérést értve), akkor a következő tizenhat feltételeli egyenlet jön létre (melyekben a különbözőki hányadosok helyébe ezeknek logaritmusai tétettek):

egyenes emelkedés számára

0= —	1."03	+	9.4472. di ₀	+	8.1905. dΩ ₀	+	0.1741. dπ ₀	+	0.2320. dM ₀	+	0.3957. dφ	+	1.9994. dμ
0= —	7.52	+	n9.3919. di ₀	+	8.2203. dΩ ₀	+	0.1465. dπ ₀	+	0.0895. dM ₀	+	0.2895. dφ	+	2.7914. dμ
0= —	1.22	+	9.1232. di ₀	+	n8.8680. dΩ ₀	+	0.1745. dπ ₀	+	0.0938. dM ₀	+	n9.9727. dφ	+	3.0647. dμ
0= —	6.68	+	8.3581. di ₀	+	8.9257. dΩ ₀	+	0.1523. dπ ₀	+	0.1523. dM ₀	+	n0.4471. dφ	+	3.2913. dμ
0= —	16.03	+	n8.4843. di ₀	+	n8.9351. dΩ ₀	+	0.1670. dπ ₀	+	0.2572. dM ₀	+	9.5990. dφ	+	3.5189. dμ
0= —	20.41	+	n8.7737. di ₀	+	n8.9146. dΩ ₀	+	0.1406. dπ ₀	+	0.1314. dM ₀	+	0.4325. dφ	+	3.4939. dμ
0= —	20.87	+	n9.2082. di ₀	+	n8.8502. dΩ ₀	+	0.1490. dπ ₀	+	0.0649. dM ₀	+	9.7311. dφ	+	3.4992. dμ
0= —	17.75	+	9.3453. di ₀	+	8.3149. dΩ ₀	+	0.1494. dπ ₀	+	0.1016. dM ₀	+	n0.3438. dφ	+	3.6011. dμ

elhajlás számára

0= +	0.34	+	9.9950. di ₀	+	9.5800. dΩ ₀	+	n9.6049. dπ ₀	+	n9.6652. dM ₀	+	n9.8134. dφ	+	n1.3163. dμ
0= +	2.94	+	n9.9512. di ₀	+	9.5712. dΩ ₀	+	n9.5739. dπ ₀	+	n9.5240. dM ₀	+	n9.7581. dφ	+	n2.1802. dμ
0= —	0.28	+	n0.1368. di ₀	+	n9.1147. dΩ ₀	+	9.1157. dπ ₀	+	9.0366. dM ₀	+	n8.9679. dφ	+	2.0187. dμ
0= —	1.58	+	n8.8072. di ₀	+	n9.6897. dΩ ₀	+	9.6901. dπ ₀	+	9.6912. dM ₀	+	n9.9949. dφ	+	2.8181. dμ
0= +	0.97	+	0.1445. di ₀	+	8.9277. dΩ ₀	+	8.5228. dπ ₀	+	8.6063. dM ₀	+	8.5098. dφ	+	1.8942. dμ
0= +	6.27	+	n9.2255. di ₀	+	9.6855. dΩ ₀	+	n9.6845. dπ ₀	+	n9.6835. dM ₀	+	n9.9843. dφ	+	n3.0363. dμ
0= +	1.04	+	n0.1253. di ₀	+	8.9597. dΩ ₀	+	n9.1828. dπ ₀	+	n9.0994. dM ₀	+	n8.8621. dφ	+	n2.5294. dμ
0= —	4.89	+	n9.9055. di ₀	+	n9.5901. dΩ ₀	+	9.5515. dπ ₀	+	9.4971. dM ₀	+	n9.7211. dφ	+	2.9914. dμ

Továbbá egy-egy egyenlet sulyául elfogadván a hozzá tartozó észleleti számot, az egyenletek sorban a következő — logarithmusokban kitett tényezőkkel t. i. az észleleti számok négyzetgyökeivel szorzandók :

egy. emelked. egyenletek	elhajlási egyenletek
0.5880	0.5880
0.3010	0.3010
0.5207	0.5207
0.5396	0.5396
0.6809	0.6808
0.6393	0.6394
0.5000	0.5000
0.4771	0.4771

Vége azon feltétel, miszerint az ekkép szorzott egyenletekben hátramaradó hibák négyzeteinek összege legkisebb értékű legyen, a következő az elemek legvalószínűbb változásait meghatározó egyenleteket hozza elő. *)

$$\begin{aligned}
 0 &= + 122.2802 + 109.8612.d\iota_0 + 9.4996.d\Omega_0 + 0.4929.d\pi_0 + 0.5611.dM_0 + 1.2456.d\varphi + 619.8.d\mu \\
 0 &= - 28.0129 + 9.4996.d\iota_0 + 12.3621.d\Omega_0 - 12.5493.d\pi_0 - 12.9072.dM_0 - 4.3863.d\varphi - 20031.8.d\mu \\
 0 &= + 881.6308 + 0.4929.d\iota_0 - 12.5493.d\Omega_0 + 224.6707.d\pi_0 + 230.2254.dM_0 + 74.6628.d\varphi - 364128.3.d\mu \\
 0 &= + 917.4048 + 0.5611.d\iota_0 - 12.9072.d\Omega_0 + 230.2254.d\pi_0 + 240.8560.dM_0 + 86.7581.d\varphi + 371911.4.d\mu \\
 0 &= + 666.5600 + 1.2456.d\iota_0 - 4.2863.d\Omega_0 + 74.6628.d\pi_0 + 86.7581.dM_0 + 440.9719.d\varphi + 67307.9.d\mu \\
 0 &= + 1562.7500 + 0.6198.d\iota_0 - 20.0318.d\Omega_0 + 364.1283.d\pi_0 + 371.9114.dM_0 + 67.3079.d\varphi + 778815.5.d\mu
 \end{aligned}$$

s megoldva :

*) L. „Encke, über die Methode der kleinsten Quadrate“ az 1834, 1835, 1836-ra való berlini évkönyvekben.

$d\iota_0 = - 0.''72$	102.07	súlyal
$\Omega_0 = + 1.01$	10.83	
$d\pi_0 = + 2.81$	4.16	
$dM_0 = - 4.46$	4.69	
$d\varphi = + 1.54$	380.98	
$d\mu = + 0.0059779$	181730000.	

Hozzáadván ezen javításokat a kiindulati elemekhez — a következő II. elemrendszert kapjuk, melyet mint átmeneti eredményt csak a második érintéspontra való tekintettel írunk ide:

IIb) elemek.

érintés 1865. jan. 17.0 (berl.)

időpont 1867. jan. 0.0

M	$= 264^{\circ}49'11.''43$	
π_0	$= 105\ 25\ 35.57$	
Ω_0	$= 17\ 14\ 21.82$	1870.0
ι_0	$= 19\ 29\ 48.94$	
φ	$= 5\ 47\ 56.44$	
$\log a$	$= 0.4923239$	
μ	$= 647.''9187779$	

Ezen elemrendszer következőleg állítja elő normalhelyeinket:

norm. h. sz.	$\alpha(o-c)$		$\delta(o-c)$	
	egyenes összehas.	a feltét. egyenl.	egyenes összehas.	a feltét. egyenl.
I.	$+0.''21$	$+0.''20$	$+0.''14$	$+0.''18$
II.	$+2.16$	$+2.17$	-2.58	-2.61
III.	-2.78	-2.77	-0.87	-0.94
IV.	$+1.73$	$+1.66$	$+0.45$	$+0.43$
V.	-0.43	-0.33	-0.48	-0.48
VI.	-0.29	-0.37	$+0.33$	$+0.31$
VII.	$+2.38$	$+2.35$	-0.13	-0.09
VIII.	-0.94	-0.90	-0.01	$+0.05$

Bármennyire kielégítőnek tekintjük ezen számokat s nem különben ezeknek folytatását, t. i. az 1867. és 1869-diki szembenállásoknak (ugyanazon II. elemrendszertől való) eltéréseit, melyek az első czikk szerint:

IX.	—8."86	—0."59
X.	—5.64	+2.15,

mégis, miután ez utóbbiak számos észleleti helyen történt — egymással igen megegyező észleleteken alapulnak, azt kell következtetnünk, hogy ezen eltérések tárgyilagosaak, s hogy le szállíttatásuk által közelítünk a valósághoz. Oly elemeket leszámaztatandók tehát, melyek több éven át Európa bolygó feltalálására s az észleletek összehasonlítására kényelmesek legyenek, egy az összes 10 normálhelyen alapuló ujlagos elemjavításhoz fogtunk, mire azonban, hogy az első kiegyenlítés alkalmával történt számítások lehetőleg megtartathassanak, szintén I. elemekből mint kiindulatiakból indultunk ki. Ezek összehasonlítva IX. és X. normálhelyekkel adják :

Sz.	$\alpha(o-c)$	$\delta(o-c)$
IX.	+22."04	+5".61
X.	+36.44	—10.18,

a mely sorok fennebbi (☉) számsorzatnak folytatásául tekintendők s a következő — további négy — feltételei egyenletet hozzák létre :

M. TUD. AKAD. ÉRT. A MATH. TUD. HÖRÉRŐL.

$$\begin{aligned} 0 &= -22.''04 + n9.4336. di_0 + 7.6578. d\Omega_0 + 0.1748. d\pi_0 + 0.2426. dM_0 + n0.3344. d\varphi + 3.8006. d\mu \\ 0 &= -36.44 + 9.3984. di_0 + 8.5420. d\Omega_0 + 0.1777. d\pi_0 + 0.2305. dM_0 + 0.4184. d\varphi + 3.8415. d\mu \\ 0 &= -5.61 + 0.0180. di_0 + n9.5663. d\Omega_0 + 9.5735. d\pi_0 + 9.6339. dM_0 + n9.7906. d\varphi + 3.1860. d\mu \\ 0 &= +10.18 + 9.9198. di_0 + 9.6306. d\Omega_0 + n9.6329. d\pi_0 + n9.6907. dM_0 + n9.8521. d\varphi + n3.2987. d\mu, \end{aligned}$$

melyekben a különbzéki hányadosok szinte logarithmusaikban kitévék. Ezen négy egyenlet közös súlytényezőjének logarithmusa $= 0.5207$; s az összes 20 feltételei egyenletből származó meghatározási egyenletek most a következőkké válnak:

$$\begin{aligned} 0 &= + 51.402 + 130.914 di_0 + 9.265 d\Omega_0 + 0.540 d\pi_0 + 0.471 dM_0 + 1.322 d\varphi + 271. d\mu \\ 0 &= + 150.262 + 9.265 di_0 + 15.876 d\Omega_0 - 15.433 d\pi_0 - 16.218 dM_0 - 4.331 d\varphi - 32622. d\mu \\ 0 &= -2917.337 + 0.540 di_0 - 15.433 d\Omega_0 + 277.780 d\pi_0 + 291.235 dM_0 + 83.350 d\varphi + 598766. d\mu \\ 0 &= -3099.307 + 0.471 di_0 - 16.218 d\Omega_0 + 291.235 d\pi_0 + 310.959 dM_0 + 95.152 d\varphi + 641256. d\mu \\ 0 &= -1460.397 + 1.322 di_0 - 4.331 d\Omega_0 + 83.350 d\pi_0 + 95.152 dM_0 + 578.587 d\varphi + 122469. d\mu \\ 0 &= -8718.64 + 0.271 di_0 - 32.622 d\Omega_0 + 598.766 d\pi_0 + 641.256 dM_0 + 122.469 d\varphi + 1817543. d\mu \end{aligned}$$

— s ezekből

$$\begin{aligned} di_0 &= - 0.''48 & . & . & . & . & . & . & . & 125.16 \text{ súlylyal} \\ d\Omega_0 &= + 0.82 & & & & & & & & 14.36 \\ d\pi_0 &= + 6.68 & & & & & & & & 4.94 \\ dM_0 &= - 7.01 & & & & & & & & 5.12 \\ d\varphi &= + 1.67 & & & & & & & & 530.19 \\ d\mu &= + 0.0049717 & & & & & & & & 483830000. \end{aligned}$$

Hozzáadván ezen javításokat a kiindulati értékekhez, legvalószínűbb III. elemrendszerünk ered, melyet, mivel jövőbeni javításainknak alapjául fog vétetni, mind a) mind b) érintkezésre való tekintettel fogunk kitenni; π_0 , Ω_0 , i_0 elemeknek π Ω i elemekké való átváltoztatására pedig a következő képletek szolgálnak:

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2} i . \sin \frac{1}{2} (\Omega + A_0) &= \sin \frac{1}{2} \Omega_0 . \sin \frac{1}{2} (i_0 + e) \\ \sin \frac{1}{2} i . \cos \frac{1}{2} (\Omega + A_0) &= \cos \frac{1}{2} \Omega_0 . \sin \frac{1}{2} (i_0 - e) \\ \cos \frac{1}{2} i . \sin \frac{1}{2} (\Omega - A_0) &= \sin \frac{1}{2} \Omega_0 . \cos \frac{1}{2} (i_0 + e) \\ \cos \frac{1}{2} i . \cos \frac{1}{2} (\Omega - A_0) &= \cos \frac{1}{2} \Omega_0 . \cos \frac{1}{2} (i_0 - e)\end{aligned}$$

De mielőtt ezt tennők, még fennebbi javításaink közép hibáit ki akarjuk tüntetni, mint ezeket a számítás adja. Helyettesítvén ezen javításokat a feltételeli egyenletekbe erednek mint hátramaradó hibák:

norm. h.	$\alpha(o-c)$	$\delta(o-c)$
I.	-1."50	+0."46
II.	+0.31	-1.80
III.	-4.14	-0.74
IV.	+2.25	+0.50
V.	+1.86	-0.75
VI.	+0.54	+0.12
VII.	+2.98	+0.19
VIII.	+1.12	+0.65
IX.	-3.63	+0.34
X.	-0.50	+0.38

s a súlyegység (azaz egy észlelt egyenes emelkedés vagy elhajlás) közép hibája gyanánt:

$$\pm 6."87,$$

a mely értékkel a fennebbi legvalószínűbb elemjavítások közép hibái súlyaikhoz képest a következők lesznek:

di_0	közép hibája	$\pm 0."61$
$d\Omega_0$	" "	± 1.81
$d\pi_0$	" "	± 3.09
dM_0	" "	± 3.04
$d\varphi$	" "	± 0.30
$d\mu$	" "	± 0.0003125

Ezen különféle értékek megítélésére azt jegyezzük meg, hogy az első kiegyenlítésből (vagyis azon $\alpha(0-c)$ és $\delta(0-c)$ számtárból, mely II. elemeknek nyolcz első normalhelyüinktől való eltéréseit tünteti ki) a súlyegység közép hibájával a kisebb érték:

$$\pm 5.''06$$

ered, s ennek az által történt növekedése, miszerint a IX. és X. normalhely hozzálépte az egyenes emelkedésekben néhány nagyobb hátramaradó hibákat idézett elő, oka annak, hogy bár az elemjavítások súlyai, mint ezek a második kiegyenlítésből eredtek, jóval nagyobbak, az elemjavítások közép hibái még sem kisebbedtek, hanem nagyobbodtak, ki véve egyetlen $d\mu$ közép hibáját, mely ± 0.0003754 értéktől ± 0.0003125 értékre süllyedt.

Európa bolygó feletti eddigi számításaink végeredményeül tehát a következő III-dik (háromféle érintkezésű) elemrendszer tekintendő:

IIIa) elemek	IIIb) elemek	IIIc) elemek
érintés- és időpont: (berl. köz. idő sz.)		
1858 jan. 0.0	1865 jan. 17.0	1872 jan. 1.0
$M = 34^{\circ}25' 0.''26$	$136^{\circ}29' 20.''20$	$232^{\circ}35' 20.''00$
1858.0 éjegyzen:	1870.0 éjegyzen:	1870.0 éjegyzen:
$\pi = 101^{\circ}56' 21.''44$	$104^{\circ}15' 22.''65$	$106^{\circ}37' 2.''71$
$\Omega = 129 57 18.45$	$129 55 56.85$	$129 45 22.45$
$i = 7 24 41.47$	$7 24 41.50$	$7 26 30.27$
$\pi_0 = 103 6 37.11$	$105 25 39.44$	$107 47 47.58$
$\Omega_0 = 17 14 3.57$	$17 14 21.63$	$17 20 58.78$
$i_0 = 19 29 45.52$	$19 29 49.18$	$19 30 20.48$
$q = 5 49 15.97$	$5 47 56.57$	$6 3 12.48$
$\log a = 0.4913541$	0.4923244	0.4911693
$\mu = 650.''0926717$	$647.''9177717$	$650.''50791$

— s ez következő módon állítja elő normálhelyeinket:

év	$\alpha(0-c)$	$\delta(0-c)$	észlel. száma
1858	$-1.''52$	$+0.''45$	15
1859	$+0.20$	-1.77	4
1860	-4.12	-0.73	11
1861	$+2.07$	$+0.45$	12

év	$\alpha(0-c)$	$\delta(0-c)$	észlel. száma
1863	+1".80	—0".71	23
1864	+0.65	+0.12	19
1865	+2.96	+0.06	10
1866	+1.01	+0.68	9
1867	—3.56	+0.44	11
1869	—0.65	+0.48	11

a mely számok az egyenes összehasonlítás útján eredtek.

Európa bolygó ezen évek alatt két első észlelt keringését végezte; az első normálhely valódi eltérése (anómalia) $\equiv 51^\circ$, az utolsóé $\equiv 57^\circ$.